

Material Recopilado por el Ing. Nelson Baptista
Contenido Extraído del Software de Estudio Prueba de
Conocimientos El Ing. Nelson Baptista te prepara para la Prueba
Psicológica, Prueba de Habilidades Especificas (PINA),
Prueba Saber 11 (Icfes) y demás pruebas internacionales.



MATEMÁTICA

RADICACIÓN Guía N° 1



“Somos la excelencia para tu aprendizaje”



+58 414-7039135



profenelsonbaptista@gmail.com



@nelson_profe



profbaptista.wordpress.com

Prof. Nelson Baptista
Asesorías Académicas

OPERACIONES CON RADICALES

Si se desea encontrar los valores de equis (x) que satisfacen la igualdad $x^2 = 4$, estos son los números 2 y -2 , este hecho se puede comprobar elevando al cuadrado los valores dados y da como resultado 4 . A los valores de una incógnita, en este caso x , que satisfacen una igualdad se les denominan **raíces**, entonces en el caso particular que se trató se puede decir que, equis (x) es igual a la raíz cuadrada de 4 , y se denota así:

$$x^2 = 4 \Rightarrow x = \sqrt{4}.$$

Se utiliza el símbolo $\sqrt{\quad}$ para indicar un radical. Generalizando, vemos que la expresión $\sqrt[n]{x^m}$ se lee raíz enésima(n) de equis(x) a la eme(m) y sus partes son:

$\sqrt{\quad}$ es el signo radical

x^m es la cantidad sub-radical

n es el índice del radical. Este debe ser un número entero positivo mayor que uno.

Las raíces surgen como una forma alterna de expresar y resolver potencias, tal como se mostró en el ejemplo anterior. Ahora piense si se quiere resolver una **potencia de exponente**

fraccionario, como por ejemplo: $4^{\frac{2}{3}}$, resultaría un poco difícil multiplicar 4 (la base) por si misma $2/3$ de veces (el exponente), tal como indica la regla para resolver potencias, considerando que $2/3$ no llega a ser ni siquiera una vez completa. Las raíces ayudan a resolver este tipo de problema, una potencia de exponente fraccionario se puede escribir como raíz, es

decir, si tenemos $x^{\frac{m}{n}}$ esto es igual a $\sqrt[n]{x^m}$.

De aquí se puede generalizar que la expresión sub-radical consta de una base y un exponente. Para convertirlo en potencia con exponente fraccionario consideramos:

- La base de la potencia es la base de la expresión sub-radical (x).
- El numerador del exponente fraccionario es el exponente de la base en la cantidad sub-radical (m) y su denominador es el índice del radical (n).

Las raíces más utilizadas son las que se leen como:

- Raíz cuadrada ($\sqrt{\quad}$), cuando en el índice no se escribe ningún valor, se sobreentiende que es dos (2)
- Raíz cúbica ($\sqrt[3]{\quad}$)
- Raíz cuarta ($\sqrt[4]{\quad}$)
- Raíz quinta ($\sqrt[5]{\quad}$)

Y así sucesivamente, observe que la lectura de la raíz depende del número que se encuentre en el índice.

Veamos los siguientes ejemplos

Ejemplo 1: Expresar las siguientes potencias en radicales:

(a) $3^{1/4} = \sqrt[4]{3}$

(b) $(x^3)^{1/5} = x^{3/5} = \sqrt[5]{x^3}$

Observe, que antes de convertir en radical se resolvió la potencia de potencia.

(c) $a^{3/5}b^{3/5} = (ab)^{3/5} = \sqrt[5]{(ab)^3}$

Antes de convertir en radical se resolvió el producto de potencias de igual base.

$x^{2/7}y^{5/7} = \sqrt[7]{x^2} \cdot \sqrt[7]{y^5}$

Fíjese que en este ejemplo, se representó cada potencia como un radical distinto ya que los exponentes no son iguales.

Ejemplo 2: Ahora expresamos los siguientes radicales como potencias:

(a) $\sqrt[4]{3^7} = 3^{7/4}$

En este ejercicio se utilizó una de las propiedades de la potencia. También observe que cuando el índice de la raíz es dos (2), éste no se escribe.

(b) $\sqrt{a^3b^3} = \sqrt{(ab)^3} = (ab)^{3/2}$

Se considera el caso particular cuando $m = 1$, podemos definir la siguiente equivalencia:

$$\boxed{\sqrt[n]{x} = r \text{ sí y sólo si } x = r^n} \quad \text{EQ. 1}$$



Ejemplo 3: Hallar el valor de la variable x , que cumplan la igualdad: $\sqrt[3]{x} = 2$

Utilizando la equivalencia **EQ. 1**, tenemos que:

$$\sqrt[3]{x} = 2 \Leftrightarrow x = 2^3, \text{ es decir } x = 8.$$

Respuesta: $x = 8$.

Ejemplo 4: Hallar el valor de la variable x , que cumpla la igualdad: $\sqrt[4]{x} = 3$

Utilizando la equivalencia **EQ. 1**, tenemos que:

$$\sqrt[4]{x} = 3 \Leftrightarrow x = 3^4, \text{ es decir } x = 81.$$

Respuesta: $x = 81$.

Ejemplo 5: Hallar el valor de la variable x , que cumplan la ecuación: $\sqrt{4x} = 12$

Utilizando la equivalencia **EQ. 1**, tenemos que:

$$\sqrt{4x} = 12 \Leftrightarrow 4x = 12^2; \quad 4x = 144 \Rightarrow x = \frac{144}{4} \Rightarrow x = 36.$$

Respuesta: $x = 36$.

Criterio de existencia de la raíz n -ésima de un número, $\sqrt[n]{x}$:

La raíz n -ésima de un número no siempre es única: en el caso de $\sqrt{4}$, se tiene que 2 y -2 son raíces cuadradas de 4; para evitar ambigüedades cuando escribimos $\sqrt{4}$ nos referimos a la raíz positiva de 4 y para referirse a la raíz negativa, se escribe: $-\sqrt{4}$.

(a) Si el índice n **es par** y x **es positivo**, existen dos raíces n -ésimas reales de x , una positiva y otra negativa. Pero la expresión $\sqrt[n]{x}$ sólo está referida a la positiva. Es decir, las dos raíces n -ésimas de x son $\sqrt[n]{x}$ y $-\sqrt[n]{x}$.

Sin embargo, los **números reales negativos** no tienen una raíz real de índice par. Por ejemplo, 81 tiene dos raíces cuadradas, 9 y -9 , pues $9^2 = 81$ y $(-9)^2 = 81$, y el número 23 tiene dos raíces cuartas $\sqrt[4]{23}$ y $-\sqrt[4]{23}$. Sin embargo, -36 no tiene raíz cuadrada porque ningún número real elevado al cuadrado da -36 . Por lo mismo, -23 no tiene raíz cuarta.

(b) Si el índice n **es impar**, cualquiera sea el número real, x , positivo o negativo, tiene una única raíz n -ésima. Por ejemplo, la raíz cúbica de 8 es 2, la raíz cúbica de -27 es -3 , y 42 tiene una única raíz cúbica denominada $\sqrt[3]{42}$.

Propiedades de los Radicales:

El producto de las raíces con igual índice es la raíz del producto.

Esta propiedad nos indica que resolver el producto de dos o más raíces con igual índice es igual a la raíz del producto de las cantidades sub-radicales con el mismo índice, en términos generales:

$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b}$$

Ejemplo 6: Escriba el siguiente producto de raíces $\sqrt[5]{2x} \cdot \sqrt[5]{3y}$ como la raíz de un producto.

Como es un producto de radicales con igual índice, se escribe la raíz una sola vez, manteniendo el mismo índice y se expresan las cantidades sub-radicales como un producto

$$\sqrt[5]{2x} \cdot \sqrt[5]{3y} = \sqrt[5]{2x \cdot 3y} = \sqrt[5]{6xy}$$

Respuesta: $\sqrt[5]{2x} \cdot \sqrt[5]{3y} = \sqrt[5]{6xy}$

El cociente de las raíces con igual índice es la raíz del cociente.

Esta propiedad nos indica que resolver el cociente de dos o más raíces con igual índice, es igual a la raíz del cociente de las cantidades sub-radicales con el mismo índice, en términos generales:

$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$$

Ejemplo 7: Escriba el siguiente cociente de raíces $\frac{\sqrt[5]{6x}}{\sqrt[5]{3y}}$ como una la raíz de un cociente.

Como es un cociente de radicales con igual índice, se escribe la raíz una sola vez manteniendo el mismo índice, y se expresan las cantidades sub-radicales como un cociente.

$$\frac{\sqrt[5]{6x}}{\sqrt[5]{3y}} = \sqrt[5]{\frac{6x}{3y}} = \sqrt[5]{\frac{2x}{y}} = \sqrt[5]{2xy^{-1}}$$

Respuesta: $\frac{\sqrt[5]{6x}}{\sqrt[5]{3y}} = \sqrt[5]{2xy^{-1}}$



Potencia de una raíz:

Cuando hablamos de potencia de radicales simplemente nos referimos a potencias que tienen como base un radical. Estas potencias cumplen con todas las propiedades de la potenciación.

Escribir una raíz elevada a una expresión, es igual a escribir bajo el signo radical la cantidad sub-radical elevada a esa misma expresión, es decir:

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m}$$

Ejemplo 8: Resolver $\left(\sqrt[3]{x^2}\right)^3$

$$\left(\sqrt[3]{x^2}\right)^3 = \sqrt[3]{(x^2)^3} = \sqrt[3]{x^6}$$

En este caso, se tiene la potencia de una potencia.

Respuesta: $\left(\sqrt[3]{x^2}\right)^3 = \sqrt[3]{x^6}$

Vamos a explicar el procedimiento para el caso donde la base es un producto de factores, con el siguiente ejemplo:

Ejemplo 9: Resolver $\left(\sqrt[4]{y^3x}\right)^5$

$$\left(\sqrt[4]{y^3x}\right)^5 = \sqrt[4]{(y^3x)^5}$$

$$= \sqrt[4]{y^{15}x^5}$$

Respuesta: $\left(\sqrt[4]{y^3x}\right)^5 = \sqrt[4]{y^{15}x^5}$

Raíz de una raíz:

Esta propiedad se refiere a que bajo un signo radical puede existir otro signo radical, como por ejemplo $\sqrt{\sqrt[3]{y}}$ o varios como $\sqrt[5]{\sqrt[4]{2z}}$. Resolver esto es muy fácil, sólo se deben multiplicar los índices de los radicales y escribir un nuevo radical con este resultado como índice y se conservan las cantidades sub-radicales. Esta regla o propiedad se enuncia de la siguiente forma:

$$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[n \cdot m]{a}$$

Ejemplo 10: Resolver $\sqrt[3]{\sqrt{a^5b^3}}$

Para la expresión $\sqrt[3]{\sqrt{a^5b^3}}$, multiplicamos los índices de los radicales dados ($3 \cdot 2 = 6$) y este será el nuevo índice del radical resultante y la cantidad sub-radical se conserva.

Respuesta: $\sqrt[3]{\sqrt{a^5b^3}} = \sqrt[6]{a^5b^3}$

Extracción de Factores de un Radical

Extraer factores de un radical significa sacarlos de la raíz. Para que sea posible extraer factores de un radical, es necesario que la cantidad sub-radical sea expresada como factores en forma de potencia y que los exponentes de los factores sean iguales o mayores que el índice del radical. El proceso para extraer factores de una raíz es el siguiente:

Paso 1: se descomponen en factores primos la cantidad sub-radical.

Paso 2: se toman aquellos factores cuyo exponente es mayor o igual al índice de la raíz y se divide el exponente de cada uno de esos factores entre el índice de la raíz. El cociente de la división representa el exponente de la base que se extrae y el residuo es exponente de la base que queda dentro de la raíz.

Veamos a continuación un ejemplo:

Ejemplo 11: Extraiga del radical $\sqrt[3]{4^7}$ los factores que sean posibles:

Paso 1: Como existe un solo factor, se divide el exponente de la cantidad sub-radical entre el índice de la raíz:

$$7 \div 3 = 2 \text{ y residuo } 1$$

Paso 2: Esto nos indica que el factor 4 se extrae de la raíz con exponente 2 y queda dentro con exponente 1

$$4^2 \cdot \sqrt[3]{4}$$

Respuesta: $\sqrt[3]{4^7} = 4^2 \cdot \sqrt[3]{4}$

Ejemplo 12: Extraiga del radical $\sqrt[3]{3125x^3}$ los factores que sean posibles.

Paso 1: Se descomponen en factores primos los factores de la cantidad sub-radical

$$\sqrt[3]{3125x^3} = \sqrt[3]{5^5x^3}$$



Paso 2: En este caso se divide 5 (exponente del factor de base 5) entre 3 (índice de la raíz), de donde el cociente es uno, este representa el exponente de la potencia con base 5 que se extrae de la raíz, es decir, la potencia $5^1=5$. El residuo de la división es dos, y representa el exponente de la potencia con base 5 que se queda dentro del radical, lo cual es equivalente a la potencia $5^2=25$.

Por otro lado tenemos que el otro factor es x^3 , entonces dividimos el exponente 3 de la potencia x^3 entre el índice 3 de la raíz, el cociente es uno y el residuo cero (0), eso significa que se extrae la potencia de base “x” con exponente uno (1), es decir, la potencia $x^1=x$, y no queda ninguna potencia con base x dentro del radical.

Respuesta: $\sqrt[3]{3125x^3} = 5x \sqrt[3]{5^2}$

Otra forma de extraer factores de un radical

Para resolver este tipo de ejercicios, como el Ejemplo 11:, de manera alterna, debemos conocer las propiedades de los radicales.

Ejemplo 13: Extraiga del radical $\sqrt[3]{3125x^3}$ los factores que sean posibles.

$$\sqrt[3]{3125x^3}$$

Se descompone 3125 en sus factores primos y se expresa como potencia.

$$= \sqrt[3]{5^5 x^3}$$

Se expresa 5^5 como multiplicación de potencias de igual base, tal que por lo menos uno de los exponentes sea igual al índice de la raíz.

$$= \sqrt[3]{5^3 5^2 x^3}$$

$$= \sqrt[3]{5^3} \cdot \sqrt[3]{5^2} \cdot \sqrt[3]{x^3} = 5^{\frac{3}{3}} \cdot 5^{\frac{2}{3}} \cdot x^{\frac{3}{3}}$$

Simplificamos los exponentes.

$$= 5^1 \cdot 5^{\frac{2}{3}} \cdot x^1 = 5x \sqrt[3]{5^2}$$

Respuesta: $\sqrt[3]{3125x^3} = 5x \cdot \sqrt[3]{25}$

Ejemplo 14: Extraiga del radical $\sqrt{3x^2y^6}$ los factores que sean posibles.

En este ejercicio, el factor “3” no se puede descomponer en factores primos (ya que es un número primo), mientras que para los otros factores, el exponente de la variable x es 2 y el de la variable y es 6, ambos exponentes pueden ser divididos de forma exacta entre el índice de la raíz, 2.



¿Se acerca la fecha de aplicación de tus pruebas de Admisión y aún no te has preparado?

!No te preocupes!

El Profe Nelson tiene la mejor opción para tí:

- Curso Intensivo de Preparación para la Prueba Psicológica.
- Curso Intensivo de Preparación para la Prueba de Habilidades Específicas(PINA).
- Curso Intensivo de Preparación para la Prueba Saber 11(Icfes).
- Software de Preparación a distancia Para la Prueba Psicológica y la Prueba de Habilidades Específicas (PINA) de todas las carreras.
- Clases y Cursos Personalizados vía Online por Skype o Zoom de matemática, física, química y pruebas psicotécnicas a nivel Nacional e Internacional para todos los países de habla Hispana.
- Curso de Preparación-Nivelación y Refuerzo para todas las Ingenierías.
- Y mucho más...

Aún estás a tiempo de prepararte.

¡Inscríbete Ya!



Prof. Nelson Baptista
Asesorías Académicas



+58 414-7039135



profenelsonbaptista@gmail.com



@nelson_profe



profbaptista.wordpress.com

